超平面配置の特性準多項式と有限群作用

大阪大学　大学院理学研究科　数学専攻
内海　凌 (Ryo UCHIUMI) *

概要

整数係数で定義される超平面配置に対して，対応する mod q 配置の補空間の数え上げ関数として特性準多項式が定義される．これは，q に関する準多項式であり，超平面配置の最も重要な不変量である特性多項式を含んでいる．本稿では，超平面配置に有限群の作用を与え，超平面配置の mod q 補空間に関する置換指標について考察する．この置換指標が q に関する準多項式であること，同変版の Ehrhart 準多項式を用いて表すことができることを紹介する．

1 Introduction

1.1 Hyperplane arrangement

V を体 $\mathbb{K}$ 上の ℓ 次元線形空間とする．V の**超平面 (hyperplane)** とは，V の $\ell-1$ 次元 (アフィン) 部分空間のことをいう．すなわち，V の超平面 H は，零でない線形関数 $\alpha : V \longrightarrow \mathbb{K}$ と定数 $b \in \mathbb{K}$ を用いて

$$H = \alpha^{-1}(b) = \left\{ x \in V \;\middle|\; \alpha(x) = b \right\}$$

と表される．V 上の**超平面配置 (hyperplane arrangement)** とは，V の超平面の有限集合のことをいう．超平面配置の研究は，代数や組合せ論だけでなく，トポロジーや代数幾何，応用数学など多岐にわたる (cf. [Yos25])．

V 上の超平面配置 $\mathcal{A}$ の部分配置 (部分集合) $\mathcal{B}$ に対して，

$$H_{\mathcal{B}} \coloneqq \begin{cases} V & \mathcal{B} = \emptyset; \\ \bigcap_{H \in \mathcal{B}} H & \mathcal{B} \neq \emptyset \end{cases}$$

と定める．$\mathcal{A}$ の**特性多項式 (characteristic polynomial)** とは，

$$\chi_{\mathcal{A}}(t) \coloneqq \sum_{\substack{\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A} \\ H_{\mathcal{B}} \neq \emptyset}} (-1)^{\#\mathcal{B}} t^{\dim H_{\mathcal{B}}}$$

のことをいう．$\chi_{\mathcal{A}}(t)$ は次数 $\ell = \dim V$ の monic 多項式である．特に，

- $\ell = 1$ のとき，$\chi_{\mathcal{A}}(t) = t - \#\mathcal{A}$;

* E-mail: uchiumi.ryou.1xu@ecs.osaka-u.ac.jp / ryo.uchiumi.math@gmail.com

- $\ell = 2$ のとき，

$$\chi_{\mathcal{A}}(t) = t^2 - \#\mathcal{A} \cdot t + \sum_{p\colon \text{交点}} \Big(\#\{\, H \in \mathcal{A} \mid H \ni p \,\} - 1\Big)$$

となる．

特性多項式は，$\mathcal{A}$ の超平面たちがどのように交わっているかという情報だけから得られる多項式である．一方で，特性多項式は超平面配置 $\mathcal{A}$ に関する様々な情報を有しており，超平面配置の最も重要な不変量であるといわれることもある．たとえば，超平面配置 $\mathcal{A}$ の補空間

$$M(\mathcal{A}) \coloneqq V \setminus \bigcup_{H \in \mathcal{A}} H$$

に関して，次のことが知られている．

Theorem 1.1. $\mathcal{A}$ を $\mathbb{K}$ 上の線形空間 V 上の超平面配置とする．

- (Zaslavsky 1975) $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ であるとき，$\mathcal{A}$ が少なくとも一つの (0 次元) 交点をもてば[*1]，
  - $M(\mathcal{A})$ の連結成分の個数は $|\chi_{\mathcal{A}}(-1)|$;
  - $M(\mathcal{A})$ の有界な連結成分の個数は $|\chi_{\mathcal{A}}(1)|$.
- (Orlik–Solomon 1980) $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ であるとき，$M(\mathcal{A})$ の Poincaré 多項式は次と等しい:

$$(-t)^{\dim V} \chi_{\mathcal{A}}(-t^{-1}).$$

1.2 Characteristic quasi-polynomial

$L \cong \mathbb{Z}^{\ell}$ を格子 (lattice) とし，$L_{\mathbb{R}} \coloneqq L \otimes \mathbb{R}$ とする．特性準多項式のために，格子 L 上で定義される超平面配置を定義する．$L^{\vee} \coloneqq \mathrm{Hom}(L, \mathbb{Z})$ を L の双対とする．零でない元 $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in L^{\vee}$ を固定し，$L_{\mathbb{R}}$ の超平面 H_i を

$$H_i = H_{\alpha_i} \coloneqq \Big\{\, x \in L_{\mathbb{R}} \;\Big|\; \alpha_i(x) = 0 \,\Big\}$$

で定義する．このような超平面を L 上で定義される超平面といい，それらの有限集合 $\mathcal{A} = \{H_1, \ldots, H_n\}$ を L 上で定義される超平面配置という．つまり，L 上で定義される超平面は，整数係数の一次式を用いて表されるような超平面である．

各正整数 $q \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対して，$L_q \coloneqq L/qL$ とおき，$\pi_q : L \longrightarrow L_q$ を自然に定義される射影とする．各超平面 H_i に対して，L_q の "超平面" を

$$H_{i,q} \coloneqq \Big\{\, \pi_q(x) \in L_q \;\Big|\; \alpha_i(x) \equiv 0 \pmod{q} \,\Big\}$$

で定め，L_q 上の "超平面配置" $\mathcal{A}_q \coloneqq \{H_{1,q}, \ldots, H_{n,q}\}$ の補空間

$$\begin{aligned} M(\mathcal{A}; q) &\coloneqq L_q \setminus \bigcup_{H_{i,q} \in A_q} H_{i,q} \\ &= \Big\{\, \pi_q(x) \in L_q \;\Big|\; \alpha_i(x) \not\equiv 0 \pmod{q} \ \text{ for all } i \in \{1, \ldots, n\} \,\Big\} \end{aligned}$$

[*1] このとき，$\mathcal{A}$ は**本質的 (essential)** であるという．

を考える．この有限集合の位数 $\#M(\mathcal{A};q)$ について，次のことが知られている．

Theorem 1.2 ([KTT08, Theorem2.4])**.** $\#M(\mathcal{A};q)$ は q に関する準多項式である．すなわち，正整数 $\tilde{n}\in\mathbb{Z}_{>0}$ と多項式 $f^{(1)},\dots,f^{(\tilde{n})}\in\mathbb{Z}[t]$ が存在して，

$$\#M(\mathcal{A};q)=f^{(r)}(q)\quad\text{if}\ \ q\equiv r \pmod{\tilde{n}}.$$

さらに，次を満たす:

(1) $\gcd\{\tilde{n},r_1\}=\gcd\{\tilde{n},r_2\}$ であるとき，$f^{(r_1)}=f^{(r_2)}$ (**gcd-property**);
(2) $\gcd\{\tilde{n},r\}=1$ であるとき，$f^{(r)}$ は $\mathcal{A}$ の特性多項式 $\chi_{\mathcal{A}}$ に等しい．

この準多項式を $\mathcal{A}$ の**特性準多項式 (characteristic quasi-polynomial)** と呼び，$\chi_{\mathcal{A}}^{\mathrm{quasi}}$ で表す:

$$\chi_{\mathcal{A}}^{\mathrm{quasi}}(q)=\#M(\mathcal{A};q).$$

準多項式はいくつかの多項式を並べたようなものであり，“周期的な多項式”と言われることがある．正整数 $\tilde{n}$ は準多項式の**周期 (period)**，各多項式 $f^{(r)}$ は準多項式の**第 r 構成素 (r-th constituent)** と呼ばれる．準多項式の周期は一意的ではないことに注意する．周期となりうる正整数のうち最小のものを準多項式の**最小周期 (minimum period)** という．

Theorem 1.2 (2) によると，q が十分大きな素数であれば，$\chi_{\mathcal{A}}^{\mathrm{quasi}}(q)=\chi_{\mathcal{A}}(q)$ となる[*2]．したがって，格子 L 上で定義されるような超平面配置 $\mathcal{A}$ の特性多項式は，いくつかの十分大きな素数 q に対する $M(\mathcal{A};q)$ の数え上げによって計算できることがわかる[*3]．

Example 1.3. $L=\mathbb{Z}^2$ とし，L 上の超平面配置 $\mathcal{A}=\{H_1,H_2\}$ を

$$H_1\coloneqq\left\{\,(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2\;\middle|\;x_1=0\right\},\qquad H_2\coloneqq\left\{\,(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2\;\middle|\;3x_2=0\right\}$$

で定める．$\mathcal{A}$ の特性多項式は $\chi_{\mathcal{A}}(t)=t^2-2t+1=(t-1)^2$ である．

各 $q\in\mathbb{Z}_{>0}$ に対して，

$$M(\mathcal{A};q)=\left\{\,(\bar{x}_1,\bar{x}_2)\in(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^2\;\middle|\;x_1\not\equiv0,\ 3x_2\not\equiv0\pmod{q}\right\}$$

であるから，

$$\begin{aligned}\chi_{\mathcal{A}}^{\mathrm{quasi}}(q)=\#M(\mathcal{A};q)&=\#\left\{\,(x_1,x_2)\in\mathbb{Z}^2\;\middle|\;0\le x_1,x_2<q,\ x_1\neq0,\ x_2\notin\{0,\tfrac{q}{3},\tfrac{2q}{3}\}\right\}\\&=\begin{cases}(q-1)^2 & \text{if}\ \gcd\{3,q\}=1;\\(q-1)(q-3) & \text{if}\ \gcd\{3,q\}=3\end{cases}\end{aligned}$$

となる．

[*2] この事実は，Kamiya–Takemura–Terao 以前からも知られていた (cf. [Yos25, §12.2])．

[*3] このようにして特性多項式を計算する方法は**有限体法 (finite field method)** と呼ばれている．

1.3 Group representation

この節で，有限群の表現について本稿に必要な事柄をまとめる．

Γ を有限群，V を $\mathbb{C}$ 上の線形空間とする．群準同型 $\rho : \Gamma \longrightarrow \mathrm{GL}(V)$ を Γ の V 上の**表現 (representation)** という．表現 ρ の**指標 (character)** とは，Γ 上の関数 $\chi_\rho \coloneqq \mathrm{tr} \circ \rho$ のことをいう．ただし，tr は線形写像のトレースを与える関数である．以下，Γ の表現の指標を単に Γ の指標という．

Γ の**類関数 (class function)** とは，関数 $\varphi : \Gamma \longrightarrow \mathbb{C}$ で

$$\varphi(\sigma^{-1}\gamma\sigma) = \varphi(\gamma) \qquad \text{for } \gamma, \sigma \in \Gamma$$

を満たすものをいい，Γ の類関数全体を $\mathrm{Cl}(\Gamma)$ で表す．$\mathrm{Cl}(\Gamma)$ は Γ の複素数値関数がなす内積空間の部分空間である．ただし，内積は

$$(\varphi, \psi) = \frac{1}{\#\Gamma} \sum_{\gamma \in \Gamma} \varphi(\gamma)\overline{\psi(\gamma)}$$

で与えられる．Γ の指標は類関数で，Γ の既約指標全体 $\{\chi_1, \ldots, \chi_k\}$ は，$\mathrm{Cl}(\Gamma)$ の正規直交基底をなす．Γ の既約指標の有理数係数の一次結合で表される Γ の類関数の集合を

$$\mathrm{Cl}_{\mathbb{Q}}(\Gamma) \coloneqq \left\{ m_1\chi_1 + \cdots + m_k\chi_k \in \mathrm{Cl}(\Gamma) \;\middle|\; m_i \in \mathbb{Q} \right\}$$

とする．$\mathrm{Cl}_{\mathbb{Q}}(\Gamma)$ の元が Γ の指標であるためには，Γ の既約指標の非負整数係数の一次結合として表せることが必要十分である．

有限群 Γ が有限集合 X に作用しているとする．すなわち，Γ は X の対称群の部分群とみなせる．X で生成される $\mathbb{C}$ 上の有限次元線形空間 $\mathbb{C}X \coloneqq \bigoplus_{x \in X} \mathbb{C}x$ に対して，Γ の作用によって群準同型 $\rho_X : \Gamma \longrightarrow \mathrm{GL}(\mathbb{C}X)$ が定まる．これを X の**置換表現 (permutation representation)** といい，その指標 χ_{ρ_X} を X の**置換指標 (permutation character)** という．各 $\gamma \in \Gamma$ に対して，$\mathbb{C}X$ の基底 X に関する $\rho_X(\gamma)$ の表現行列は置換行列である．よって，X の置換指標は

$$\chi_{\rho_X}(\gamma) = \#\left\{ x \in X \;\middle|\; \gamma x = x \right\} \tag{1.1}$$

を満たす．

有限群 Γ は，左からの積が引き起こす自分自身への作用をもつ．この作用によって得られる置換表現は**正則表現 (regular representation)** と呼ばれる．正則表現の指標を χ_{R} で表すとき，式 (1.1) によって

$$\chi_{\mathrm{R}}(\gamma) = \begin{cases} \#\Gamma & \text{if } \gamma = 1; \\ 0 & \text{if } \gamma \neq 1 \end{cases}$$

となる．

H を Γ の部分群とする．H の指標 $\theta : H \longrightarrow \mathbb{C}$ における Γ の**誘導指標 (induced character)** とは，次で定まる指標 $\mathrm{Ind}_H^\Gamma \theta : \Gamma \longrightarrow \mathbb{C}$ のことをいう:

$$\left(\mathrm{Ind}_H^\Gamma \theta\right)(\gamma) = \frac{1}{\#H} \sum_{\substack{\sigma \in \Gamma \\ \sigma^{-1}\gamma\sigma \in H}} \theta(\sigma^{-1}\gamma\sigma).$$

1.4 Equivariant Ehrhart theory

L を格子とし，$L_{\mathbb{R}} \coloneqq L \otimes \mathbb{R}$ とする．$P \subseteq L_{\mathbb{R}}$ を有理多面体とする．つまり，P はすべての頂点が有理点であるような多面体である．各 $q \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対して，P を q 倍に膨らませた多面体を qP で表す．このとき，qP 上の格子点を数え上げる関数

$$\mathrm{L}_P(q) \coloneqq \#(qP \cap L)$$

は q に関する準多項式となる[*4]．これを **Ehrhart 準多項式 (Ehrhart quasi-polynomial)** と呼ぶ．P が格子多面体 (すべての頂点が L 上にある多面体) であるとき，L_P は単に多項式 (最小周期 1 の準多項式) となる．

多面体 P を膨らませる代わりに格子 L を縮小させることでも，Ehrhart 準多項式と同じ数え上げ関数が得られることに注意する．すなわち，

$$\mathrm{L}_P(q) = \#(qP \cap L) = \#(P \cap \tfrac{1}{q}L)$$

である．

多面体 P の相対的内部 (relative interior) を P° で表す．P° 上の格子点を数え上げる関数 $L_{P^\circ}(q)$ も q に関する準多項式であり，次の相互関係が知られている:

$$\mathrm{L}_{P^\circ}(q) = (-1)^{\dim P}\,\mathrm{L}_P(-q).$$

"同変" Ehrhart 理論 (Equivariant Ehrhart theory) とは，多面体上の格子点の数え上げを群の作用込みで考えるもので，Stapledon [Sta11] により導入された．大まかには，Ehrhart 準多項式の代わりに，多面体の格子点に関する置換指標を考えるものである．

格子 L に対して，有限群 $\mathit{\Gamma}$ が $\rho : \mathit{\Gamma} \longrightarrow \mathrm{GL}(L)$ によって作用しているとする．L 上の有理多面体 P が $\mathit{\Gamma}$ の作用で不変であると仮定する[*5]．各 $q \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対して，$qP \cap L$ の置換指標を $\chi_{P,q} : \mathit{\Gamma} \longrightarrow \mathbb{C}$ で表す．つまり，

$$\chi_{P,q}(\gamma) = \#\left\{ x \in qP \cap L \;\middle|\; \rho(\gamma)(x) = x \right\} = \#(qP^\gamma \cap L) = \#(P^\gamma \cap \tfrac{1}{q}L)$$

である．ただし，P^γ は P の $\rho(\gamma)$ によって固定される点からなる部分集合で，有理多面体である [Sta11, Lemma 5.4].

Theorem 1.4 ([Sta11, Theorem 5.7])**.** $\chi_{P,q}$ は q に関する準多項式である．ただし，各構成素は $\mathrm{Cl}_{\mathbb{Q}}(\mathit{\Gamma})$ の元を係数にもつ多項式である．

特に，$\mathit{\Gamma}$ の単位元 $\gamma = 1$ に対して，$\chi_{P,q}(1) = \mathrm{L}_P(q)$ であることがわかる．この意味で，$\chi_{P,q}$ は Ehrhart 準多項式の "精密化"であると考えられる．

[*4] 一般に，gcd-property は満たさない．

[*5] しばしば，平行移動による違いは無視される．

Example 1.5. $L=\mathbb{Z}^2$ とし，有理多面体 (長方形) $P_1 \coloneqq [0,1]\times[0,\frac{1}{3}]$，$P_2 \coloneqq [0,1]\times[\frac{1}{3},\frac{2}{3}]$ を考える．Ehrhart 準多項式はそれぞれ次の通りである:

$$\mathrm{L}_{P_1}(q)=\begin{cases}\frac{(q+1)(q+2)}{3} & \text{if } q\equiv 1 \pmod 3;\\ \frac{(q+1)^2}{3} & \text{if } q\equiv 2 \pmod 3;\\ \frac{(q+1)(q+3)}{3} & \text{if } q\equiv 3 \pmod 3,\end{cases}\qquad \mathrm{L}_{P_2}(q)=\begin{cases}\frac{(q+1)(q-1)}{3} & \text{if } q\equiv 1 \pmod 3;\\ \frac{(q+1)^2}{3} & \text{if } q\equiv 2 \pmod 3;\\ \frac{(q+1)(q+3)}{3} & \text{if } q\equiv 3 \pmod 3.\end{cases}$$

多面体 P_t $(t\in\{1,2\})$ に対して，位数 2 の群 $\Gamma=\{1,\gamma\}$ が

$$\gamma:(x_1,x_2)\longmapsto(1-x_1,x_2)\qquad \text{for } (x_1,x_2)\in P_t$$

で作用しているとする．このとき，

$$P_t^{\gamma}=\left\{\,(x_1,x_2)\in P_t \;\middle|\; x_1=\tfrac{1}{2}\,\right\}$$

であるため，

$$\chi_{P_1,q}(\gamma)=\begin{cases}\frac{q+1}{3} & \text{if } q\equiv 2 \pmod 6;\\ \frac{q+2}{3} & \text{if } q\equiv 4 \pmod 6;\\ \frac{q+3}{3} & \text{if } q\equiv 6 \pmod 6;\\ 0 & \text{otherwise,}\end{cases}\qquad \chi_{P_2,q}(\gamma)=\begin{cases}\frac{q+1}{3} & \text{if } q\equiv 2 \pmod 6;\\ \frac{q-1}{3} & \text{if } q\equiv 4 \pmod 6;\\ \frac{q+3}{3} & \text{if } q\equiv 6 \pmod 6;\\ 0 & \text{otherwise}\end{cases}$$

となる．

2 Results

2.1 Setting

同変 Ehrhart 理論のように，特性準多項式の代わりに集合 $M(\mathcal{A};q)$ の置換指標を考えて，“同変版特性準多項式”の理論を構築したい．そのために，超平面配置への群作用についていくつか準備する．

Γ を有限群とし，格子 L に対して群準同型 $\rho:\Gamma\longrightarrow\mathrm{GL}(L)$ による線形な作用が与えられているとする．ただし，ρ は単射であると仮定する．このとき，Γ の $L^{\vee}$ への作用 $\rho^{\vee}:\Gamma\longrightarrow\mathrm{GL}(L^{\vee})$ を

$$\rho^{\vee}(\gamma)(\alpha)=\alpha\circ\rho(\gamma^{-1})\qquad \text{for } \gamma\in\Gamma,\ \alpha\in L^{\vee}$$

となるように定める．

$\mathcal{A}=\{H_1,\ldots,H_n\}$ を L 上で定義された超平面配置とする．$\mathcal{A}$ が Γ の作用で**不変 ($\boldsymbol{\Gamma}$-invariant)** であるとは，任意の $\gamma\in\Gamma$ および $H_i\in\mathcal{A}$ に対して $\rho(\gamma)(H_i)\in\mathcal{A}$ を満たすときにいう．また，任意の $\gamma\in\Gamma$ に対して

$$\rho^{\vee}(\gamma)\big(\{\pm\alpha_1,\ldots,\pm\alpha_n\}\big)=\{\pm\alpha_1,\ldots,\pm\alpha_n\}$$

であることとも同値である．

各 $q\in\mathbb{Z}_{>0}$ に対して，有限群 Γ の L_q への作用 $\rho_q:\Gamma\longrightarrow\mathrm{GL}(L_q)$ が

$$\rho_q(\gamma)\circ\pi_q=\pi_q\circ\rho(\gamma)\qquad \text{for } \gamma\in\Gamma$$

を満たすように定まる．L 上の超平面配置 $\mathcal{A}$ が $\varGamma$ の作用で不変であるとき，集合 $M(\mathcal{A};q)$ は $\varGamma$ の作用で不変な集合となることがわかる [Uch, Lemma 2.3]．これは，有限群 $\varGamma$ が $M(\mathcal{A};q)$ に作用していることを意味するため，$M(\mathcal{A};q)$ の置換指標を考えることができる．この置換指標を $\chi_{\mathcal{A},q} : \varGamma \longrightarrow \mathbb{C}$ で表すことにすると，式 (1.1) によって

$$\chi_{\mathcal{A},q}(\gamma) = \#\left\{ x \in M(\mathcal{A};q) \;\middle|\; \rho_q(x) = x \right\} \qquad \text{for } \gamma \in \varGamma$$

となる．特に，$\varGamma$ の単位元 $\gamma = 1$ に対しては，$\chi_{\mathcal{A},q}(1) = \chi_{\mathcal{A}}^{\mathrm{quasi}}(q)$ となるため，特性準多項式は $\chi_{\mathcal{A},q}$ によって精密化される．

2.2 Quasi-polynomiality

Theorem 2.1 ([Uch, Theorem 2.6])**.**

(1) 各 $\gamma \in \varGamma$ に対して，$\chi_{\mathcal{A},q}(\gamma)$ は q に関する準多項式で，gcd-property を満たす．

(2) $\chi_{\mathcal{A},q}$ は q に関する準多項式で，gcd-property を満たす．ただし，準多項式 $\chi_{\mathcal{A},q}$ の各構成素は，$\mathrm{Cl}_{\mathbb{Q}}(\varGamma)$ の元を係数にもつ多項式である．

本稿での証明は割愛し，証明のアイデアのみを述べる．(2) は，$\chi_{\mathcal{A},q}$ の既約指標による分解と (1) から得られる．(1) は，$\chi_{\mathcal{A},q}(\gamma)$ を包除原理により変形し，次の補題を使うことで証明できる．

Lemma 2.2 ([KTT08, Lemma 2.1])**.** $f : \mathbb{Z}^{\ell} \longrightarrow \mathbb{Z}^m$ を $\mathbb{Z}$-準同型とする．各 $q \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対して，$f_q : \mathbb{Z}_q^{\ell} \longrightarrow \mathbb{Z}_q^m$ を f から誘導される準同型とする．このとき，$\#\ker f_q$ は q に関する準多項式で，gcd-property を満たす．さらに，A を f の表現行列とするとき，

$$\#\ker f_q = \left(\prod_{j=1}^{r} \gcd\{d_j, q\} \right) q^{\ell - r} \tag{2.1}$$

となる．

ただし，式 (2.1) において，$r = \operatorname{rank} A$ であり，$d_1, \ldots, d_r$ は A の単因子である．すなわち，ℓ 次 unimodular 行列 U，m 次 unimodular 行列 V が存在して

$$UAV = \begin{pmatrix} d_1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & d_r & & \\ & & & 0 & \\ & & & & \ddots \end{pmatrix}, \qquad d_1 \mid d_2 \mid \cdots \mid d_r$$

を満たしている[*6]．

式 (2.1) を用いることで，$\chi_{\mathcal{A},q}(\gamma)$ をいくつかの行列の単因子を用いて表すことができる．しかし，次元 ℓ と超平面の枚数 n が増加すればするほど，計算が必要な行列の個数とサイズは増加する．また，単因子を用いた表示によって，$\chi_{\mathcal{A},q}$ の周期を一つ計算することができるが，一般にその周期は最小ではない．

[*6] このような U, V は必ず存在する．一意的ではない．

2.3 Via equivariant Ehrhart theory

最後に，$\chi_{\mathcal{A},q}$ と同変 Ehrhart 理論の関係を述べる．

$T := L_{\mathbb{R}}/L$ とおき，$\pi_T : L_{\mathbb{R}} \longrightarrow T$ を自然に定まる射影とする．このとき，有限群 Γ の L への作用 $\rho : \Gamma \longrightarrow \mathrm{GL}(L)$ が T への作用 $\rho_T : \Gamma \longrightarrow \mathrm{GL}(T)$ を誘導し，

$$\rho_T(\gamma) \circ \pi_T = \pi_T \circ \rho(\gamma) \qquad \text{for } \gamma \in \Gamma$$

を満たしている．ただし，

$$\mathrm{GL}(T) := \left\{ g : T \longrightarrow T \;\middle|\; \text{there exists } g' \in \mathrm{GL}(L_{\mathbb{R}}) \text{ such that } g \circ \pi_T = \pi_T \circ g' \right\}$$

である．

各 $q \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対して，

$$T[q] := \left\{ t \in T \;\middle|\; qt = 0 \right\} = \left\{ \pi_T(x) \in T \;\middle|\; qx \in L \right\}$$

とする．$T[q]$ の元は T の **q-torsion point** と呼ばれる．このとき，全単射 $f : T[q] \longrightarrow L_q$;

$$f : \pi_T(x) \longmapsto \pi_q(x) \qquad \text{for } x \in L_{\mathbb{R}}$$

を介して，$T[q]$ と L_q は Γ が作用する空間として同一視できる．特に，$\mathcal{A}_q$ の補空間 $M(\mathcal{A};q)$ は $T[q]$ 上では

$$T(\mathcal{A})[q] := \left\{ \pi_T(x) \in T[q] \;\middle|\; \alpha_i(x) \notin \mathbb{Z} \;\text{ for all } i \in \{1, \dots, n\} \right\}$$

に対応する．したがって，同変版の特性準多項式 $\chi_{\mathcal{A},q}$ は，$T(\mathcal{A})[q]$ の置換指標と一致する:

$$\chi_{\mathcal{A},q}(\gamma) = \#\left\{ t \in T(\mathcal{A})[q] \;\middle|\; \rho_T(\gamma)(t) = t \right\}$$

各 $k \in \mathbb{Z}$ に対して

$$H_i^k := \left\{ x \in L_{\mathbb{R}} \;\middle|\; \alpha_i(x) = k \right\}$$

とおき，アフィン超平面の集合

$$\mathcal{A}^{\mathrm{aff}} := \left\{ H_i^k \;\middle|\; i \in \{1, \dots, n\},\ k \in \mathbb{Z} \right\}$$

を与える．アフィン配置 $\mathcal{A}^{\mathrm{aff}}$ の補空間

$$M(\mathcal{A}^{\mathrm{aff}}) := L_{\mathbb{R}} \setminus \bigcup_{H \in \mathcal{A}^{\mathrm{aff}}} H$$

に対して，$T(\mathcal{A})[q] = \pi_T(M(\mathcal{A}^{\mathrm{aff}})) \cap T[q]$ となることに注意する．

補空間 $M(\mathcal{A}^{\mathrm{aff}})$ 連結成分を $\mathcal{A}^{\mathrm{aff}}$ の**部屋 (chamber)** と呼ぶ．$\mathcal{A}^{\mathrm{aff}}$ の部屋全体からなる集合を $\mathcal{C}(\mathcal{A}^{\mathrm{aff}})$ とする．T 上の補空間 $T(\mathcal{A})$ の連結成分全体からなる集合を $\mathcal{C}_T$ とすると，

$$\mathcal{C}_T = \left\{ \pi_T(C) \;\middle|\; C \in \mathcal{C}(\mathcal{A}^{\mathrm{aff}}) \right\}$$

となる．記号の乱用だが，各部屋 $C \in \mathcal{A}^{\mathrm{aff}}$ に対して，$\pi_T(C)$ 上の q-torsion point を数え上げる関数を

$$\mathrm{L}_{\pi_T(C)}(q) = \#(\pi_T(C) \cap T[q])$$

で表す．$\mathrm{L}_{\pi_T(C)}(q)$ は q に関する準多項式である．特に C が有界であれば，$\mathrm{L}_{\pi_T(C)}$ は C の Ehrhart 準多項式 L_C と一致する．このとき，$T(\mathcal{A})[q]$ の点を $T(\mathcal{A})$ の連結成分ごとに数えることで，$\mathcal{A}$ の特性準多項式 $\chi_{\mathcal{A}}^{\mathrm{quasi}}$ は

$$\chi_{\mathcal{A}}^{\mathrm{quasi}}(q) = \sum_{\pi_T(C) \in \mathcal{C}_T} \mathrm{L}_{\pi_T(C)}(q)$$

と表すことができる．

以下，$\mathcal{C}_T$ の元 $\pi_T(C)$ を単に C で表すことにする．有限群 $\mathit{\Gamma}$ の作用 $\rho_T : \mathit{\Gamma} \longrightarrow \mathrm{GL}(T)$ は $\mathcal{C}_T$ への作用を誘導する．この作用での γ による固定点の集合を $\mathcal{C}_T^{\gamma}$，元 $C \in \mathcal{C}_T$ に関する固定部分群を $\mathit{\Gamma}_C$ で表す:

$$\mathcal{C}_T^{\gamma} \coloneqq \left\{ C \in \mathcal{C}_T \;\middle|\; \gamma(C) = C \right\}, \qquad \mathit{\Gamma}_C \coloneqq \left\{ \gamma \in \mathit{\Gamma} \;\middle|\; \gamma(C) = C \right\}.$$

部分群 $\mathit{\Gamma}_C$ による $C \cap T[q]$ の置換表現を $\chi_{C,q}^{\mathit{\Gamma}_C} : \mathit{\Gamma}_C \longrightarrow \mathbb{C}$ で表す:

$$\chi_{C,q}^{\mathit{\Gamma}_C}(\gamma) = \#\left\{ t \in C \cap T[q] \;\middle|\; \rho_T(\gamma)(t) = t \right\} \qquad \text{for } \gamma \in \mathit{\Gamma}_C.$$

このとき，各 $\gamma \in \mathit{\Gamma}$ に対して，$T(\mathcal{A})[q]$ の $\rho_T(\gamma)$ による固定点を $T(\mathcal{A})$ の連結成分ごとに数えることで

$$\chi_{\mathcal{A},q}(\gamma) = \sum_{C \in \mathcal{C}_T^{\gamma}} \chi_{C,q}^{\mathit{\Gamma}_C}(\gamma) \tag{2.2}$$

となることがわかる．

$\{C_1, \ldots, C_k\}$ を $\mathcal{C}_T$ の $\mathit{\Gamma}$-軌道の完全代表系とする．$\chi_{\mathcal{A},q}$ の同変版の Ehrhart 準多項式を用いた表示として次を得る．

Theorem 2.3 ([Uch, Theorem 4.3])**.** 各 $q \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対して，

$$\chi_{\mathcal{A},q} = \sum_{i=1}^{k} \mathrm{Ind}_{\mathit{\Gamma}_{C_i}}^{\mathit{\Gamma}} \chi_{C_i,q}^{\mathit{\Gamma}_{C_i}}.$$

Theorem 2.3 は式 (2.2) から得られる (ここでの証明は省略する)．特に，$\mathcal{A}^{\mathrm{aff}}$ の部屋がすべて有界であるとき，$\chi_{\mathcal{A},q}$ が同変版の Ehrhart 準多項式の誘導指標の和として表せることを意味する．したがって，$\chi_{\mathcal{A},q}$ は有理多面体上の格子点の数え上げによって計算することができる．

Example 2.4. $L = \mathbb{Z}^2$ に対して，位数 2 の群 $\mathit{\Gamma} = \{1, \gamma\}$ の作用 $\rho : \mathit{\Gamma} \longrightarrow \mathrm{GL}(\mathbb{Z}^2)$ が

$$\rho(\gamma) : (x_1, x_2) \longmapsto (-x_1, x_2) \qquad \text{for } (x_1, x_2) \in \mathbb{Z}^2$$

で与えられているとする．Example 1.3 で定義した超平面配置 $\mathcal{A}$ はこの作用に関して不変である．このとき，$\rho_q(\gamma)$ による固定点の集合 $M(\mathcal{A};q)^\gamma$ は

$$M(\mathcal{A};q)^\gamma = \left\{ (\bar{x}_1, \bar{x}_2) \in (\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^2 \;\middle|\; x_1 \equiv \tfrac{q}{2},\ 3x_2 \not\equiv 0 \pmod{q} \right\}$$

となるため，

$$\begin{aligned}\chi_{\mathcal{A},q}(\gamma) = \#M(\mathcal{A};q)^\gamma = \#\left\{ (x_1, x_2) \in \mathbb{Z}^2 \;\middle|\; x_1 = \tfrac{q}{2},\ 0 \le x_2 < q,\ x_2 \notin \{0, \tfrac{q}{3}, \tfrac{2q}{3}\} \right\} \\ = \begin{cases} 0 & \text{if } \gcd\{6,q\} = 1, 3; \\ q-1 & \text{if } \gcd\{6,q\} = 2; \\ q-3 & \text{if } \gcd\{6,q\} = 6 \end{cases}\end{aligned}$$

となる．

$T = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ 上の補空間 $T(\mathcal{A})$ は 3 つの連結成分

$$P_1^\circ = (0,1) \times (0, \tfrac{1}{3}), \qquad P_2^\circ = (0,1) \times (\tfrac{1}{3}, \tfrac{2}{3}), \qquad P_3^\circ = (0,1) \times (\tfrac{2}{3}, 1),$$

からなる．連結成分はいずれも ρ_T の作用で不変であるため，$\chi_{\mathcal{A},q}$ は同変版の Ehrhart 準多項式の和として

$$\chi_{\mathcal{A},q} = \chi_{P_1^\circ,q} + \chi_{P_2^\circ,q} + \chi_{P_3^\circ,q}$$

と表すことができる．

また，$\chi_{\mathcal{A},q}$ の q に関する準多項式としての表示は次の通りである:

$$\chi_{\mathcal{A},q} = \begin{cases} \frac{1}{2}(\chi_{\mathrm{R}} q^2 - 2\chi_{\mathrm{R}} q + \chi_{\mathrm{R}}) & \text{if } \gcd\{6,q\} = 1; \\ \frac{1}{2}(\chi_{\mathrm{R}} q^2 - (3\chi_{\mathrm{R}} - 2\mathbf{1})q + 2\chi_{\mathrm{R}} - 2\mathbf{1}) & \text{if } \gcd\{6,q\} = 2; \\ \frac{1}{2}(\chi_{\mathrm{R}} q^2 - 4\chi_{\mathrm{R}} q + 3\chi_{\mathrm{R}}) & \text{if } \gcd\{6,q\} = 3; \\ \frac{1}{2}(\chi_{\mathrm{R}} q^2 - (5\chi_{\mathrm{R}} - 2\mathbf{1})q + 6\chi_{\mathrm{R}} - 6\mathbf{1}) & \text{if } \gcd\{6,q\} = 6. \end{cases}$$

ただし，χ_{R} は $\mathit{\Gamma}$ の正則表現の指標，$\mathbf{1}$ は自明な指標 (すべての元に対して 1 を返す関数) を表す．

参考文献

[KTT08] H. Kamiya, A. Takemura and H. Terao, Periodicity of hyperplane arrangements with integral coefficients modulo positive integers, Journal of Algebraic Combinatorics, **27** (2008), no. 3, 317–330.

[Sta11] A. Stapledon, Equivariant Ehrhart theory, Advances in Mathematics, **226** (2011), no. 4, 3622–3654.

[Uch] R. Uchiumi, The characteristic quasi-polynomials of hyperplane arrangements with actions of finite groups, (2025), arXiv:2508.10236.

[Yos25] 吉永正彦,『やさしくまなぶ超平面配置』(数学セミナーライブラリー), 日本評論社, 2025.